



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Valg af tværbjælke-stivhed i simple risteværker

tilnærmelsesformler for lastfordeling

Albertsen, A.

Publication date:
1992

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

[Link to publication from Aalborg University](#)

Citation for published version (APA):

Albertsen, A. (1992). *Valg af tværbjælke-stivhed i simple risteværker: tilnærmelsesformler for lastfordeling*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. R/ Nr. R9210

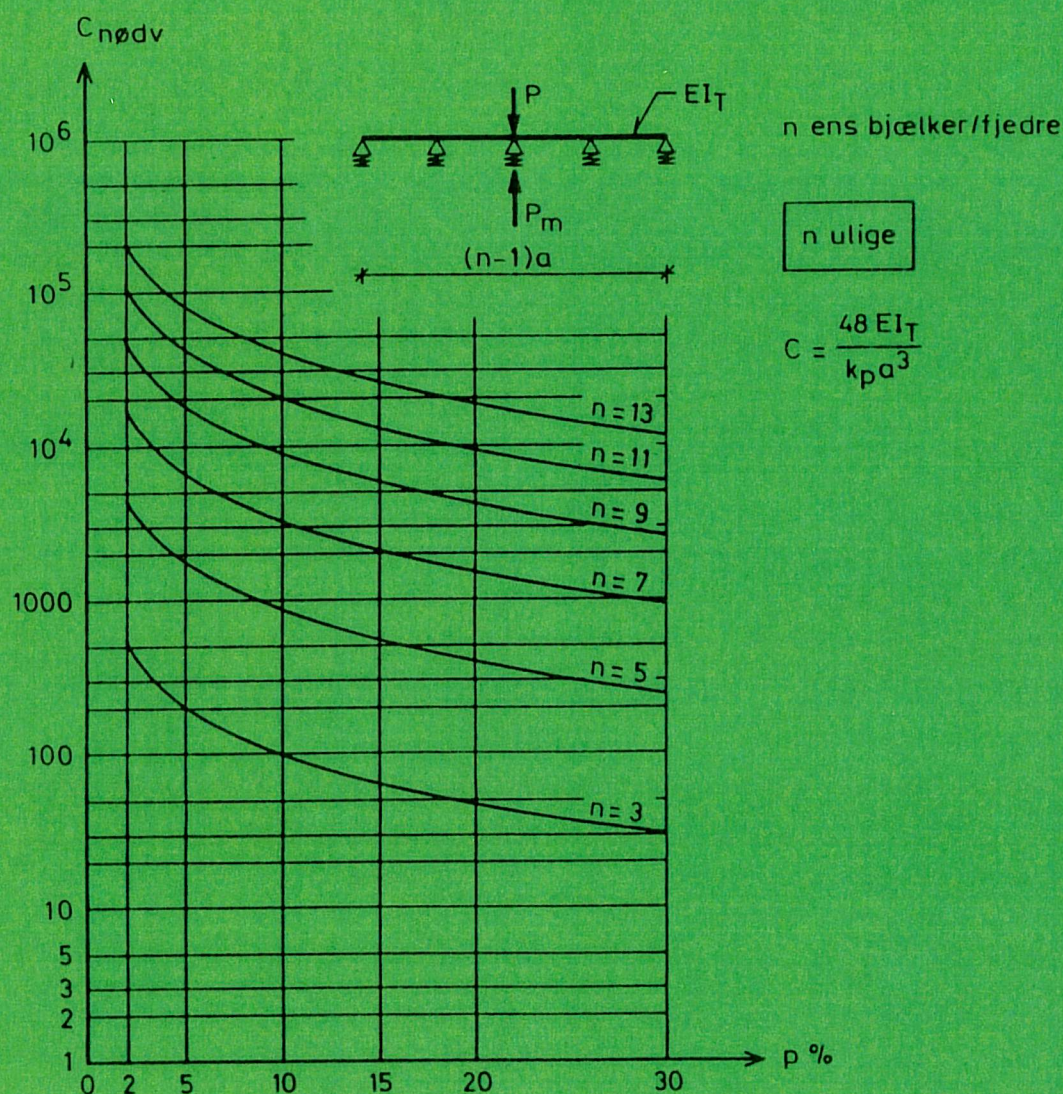
General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal -

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at vbn@aub.aau.dk providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Tekst og formler er skrevet af Ulla Pedersen.
Figurer er tegnet af Ingrid Christensen.

SYNOPSIS

Rapporten omhandler udvikling af kriterier for valg af tværbjelkestivhed i simple, elastiske risteværker, når en ønsket lastfordeling skal realiseres. Desuden angives tilnærmelsesformler for lastfordelingen, når risteværkets stivhedsforhold er kendt.

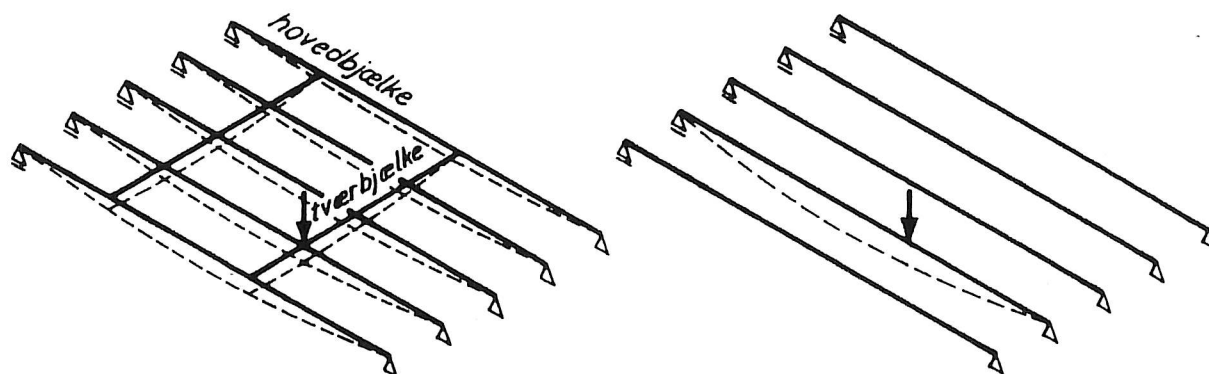
Fremstillingen knytter sig til 2 udvalgte lastsituationer, nemlig last på tværbjelken ved yderste hoveddrager hhv. ved risteværkets midte. Der er udviklet formler gældende for 3 til 14 ens, ækvidistante hoveddragere. I sidstnævnte lasttilfælde har det været nødvendigt at skelne mellem risteværker med et lige hhv. et ulige antal hoveddragere. Der tages ikke hensyn til bjælkernes eventuelle vridningsstivhed.

INDHOLDSFORTEGNELSE

INDLEDNING	1
FORMÅL OG BEREGNINGSSTRATEGI	3
PUNKTLAST OVER YDERBJÆLKE	5
Fastlæggelse af krav til lastfordelingsparameteren C	5
Udvikling af tilnærmelsesformel til bestemmelse af $C_{n\phi dv}$	9
Afsluttende bemærkninger	14
PUNKTLAST MIDT PÅ TVÆRBJÆLKE	15
Bestemmelse af krav til lastfordelingsparameteren C	15
n ulige: side 16; n lige: side 17	
Udvikling af tilnærmelsesformler til bestemmelse af $C_{n\phi dv}$	20
n ulige: side 20; n lige: side 24	
OVERSIGT OVER RESULTATERNE - FORMLER FOR $C_{n\phi dv}$	29
FORMLER TIL DIREKTE BESTEMMELSE AF BJÆLKELAST	32
Last på yderbjælke, formel for P_A	32
Last midt på tværbjælke, formler for P_m	33
LITTERATURLISTE	36
SYMBOLLISTE	36

INDLEDNING

Mange konstruktioner indeholder plane dæk eller vægge, der er afstivet med ribber eller bjælker. I tilfælde, hvor et dæk eller en væg påvirkes af store koncentrerede laster, vil det ofte være fordelagtigt at anordne en eller flere tværbjælker/krydsende ribber til at fordele belastningen mellem de enkelte bjælker. Som eksempel er på figur 1 antydning virkningen af en punktlast på et brodæk med henholdsvis uden tværbjælker.



Dæk med tværbjælker

Dæk uden tværbjælker

Figur 1. Simpelt risteværk (skrå afbildning). — — — angiver nedbøjning.

I dækket med tværbjælker påtvinges alle hovedbjælkerne deformationer, hvorved den direkte belastede hovedbjælke aflastes. Afgørende parametre for lastfordelingen er tværbjælkernes bøjnings- og vridningsstivhed i forhold til hovedbjælkernes bøjnings- og vridningsstivhed; heri indgår også risteværkets geometri og understøtningsforhold.

Afgrænsning: I denne rapport begrænses fremstillingen til at omfatte plane risteværker med følgende karakteristika:

- ortogonale risteværker med kun én tværbjælke og ens, ækvidistante hovedbjælker med samme understøtningsforhold
- bjælker af lineærelastisk materiale
- last udelukkende på tværbjælker (se herom nedenfor)

Desuden gøres følgende tilnærmelser:

- tværdragerens vridningsstivhed negligeres, idet den ofte er uden særlig betydning for den dimensionerende lastopstilling
- hovedbjælkernes vridningsstivhed negligeres

Ang. **lastplacering:** Virkningen af en vilkårligt placeret last kan opfattes som en summation af flytninger og snitkræfter fremkommet i flere etaper, hvor man i første omgang tænker krydsningspunkterne mellem tvær- og hovedbjælker fastholdt; virkningen af de derved fremkomne reaktioner elimineres derefter ved at påføre risteværket laster af samme størrelse som reaktionerne, men modsat rettet disse. Virkningerne i

den første etape findes ved den almindelige teori for kontinuerlige bjælker; virkningen i den anden etape falder ind under de risteværksberegninger, som behandles i [1], og som danner grundlag for undersøgelser og konklusioner i nærværende rapport.

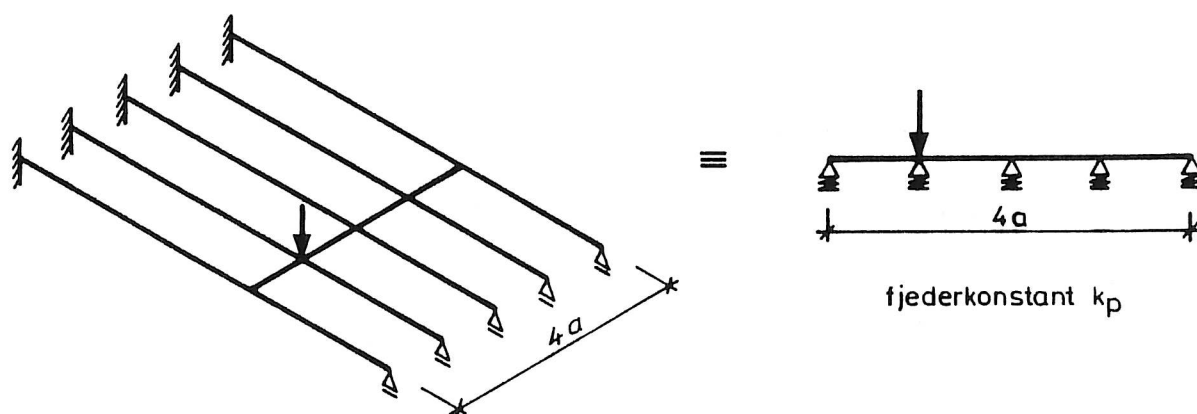
Ang. hovedbjælkernes vridningsstivhed: Denne er sjældent af større betydning, med mindre hovedbjælkerne er udformet som afstivede kassedragere. Det er hensigten at præsentere en nærmere undersøgelse af disse forhold i en senere rapport. Emnet er berørt i [2].

For et ortogonalt risteværk med ens, ækvidistante hovedbjælker og kun én tværbjælke kan lastfordelingen mellem hovedbjælkerne udtrykkes ved hjælp af parameteren

$$C = \frac{48EI_T}{k_p a^3} \quad (1)$$

jfr. [1]. Her er a afstanden mellem hovedbjælkerne, EI_T tværbjælkens bøjningsstivhed og k_p hovedbjælkernes fjederkonstant for bøjning = den kraft, der placeret i krydsningspunktet mellem hoved- og tværbjælke giver nedbøjningen 1 i dette punkt, når tværbjælken antages uvirksom.

C indgår i opstillingen af et sæt lineære ligninger, der udtrykker risteværkets ligevægt og sammenhæng (overensstemmelse mellem flytninger af tvær- og hovedbjælker). Opstilling og løsning af ligningerne er analog til bestemmelse af reaktioner for en bjælke (tværbjælken) på elastiske understøtninger (hovedbjælkerne), se figur 2.



Figur 2. Analogi mellem risteværk og bjælke på elastiske understøtninger.

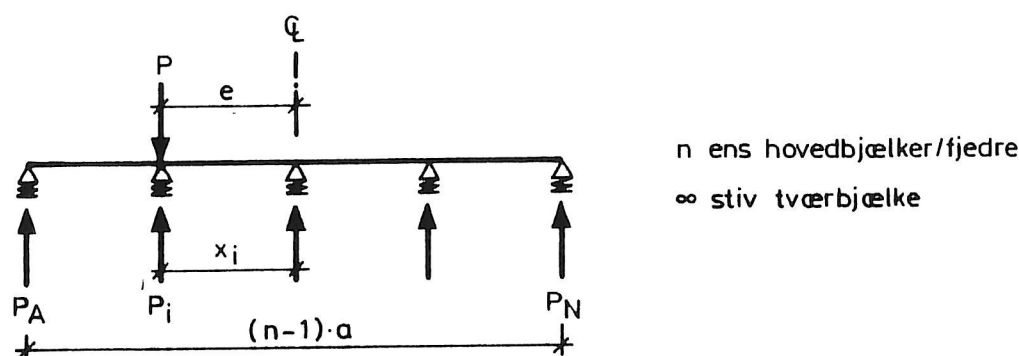
C kan variere i området $0 \leq C < \infty$ svarende til de konstruktive yderpunkter "virkningsløs tværbjælke" ($C = 0$) og "uendeligt stiv tværbjælke" ($C \rightarrow \infty$).

-
- [1] R8716 A. Albertsen: Ligningssystemer til bestemmelse af lastfordeling i simple risteværker. Aug. 1987. Instituttet for Bygningsteknik.
- [2] R8814 S. Kloch: Lastfordelingsprogrammet RIST00. Aug. 1988. Instituttet for Bygningsteknik.

FORMÅL OG BEREGNINGSSTRATEGI

Formålet med undersøgelsen, der er beskrevet i denne rapport, er at angive den nødvendige bøjningsstivhed af en tværdrager, når en vis grad af lastfordeling ønskes opnået. Dette gøres dels ved præsentation af resultater fundet ved et stort antal kørsler med RIST00 [2], og dels ved udvikling af tilnærmede formler, der kan benyttes ved en forenklet analytisk bestemmelse af lastfordelingen.

I lighed med [3] tages der udgangspunkt i grænsetilfældet "uendeligt stiv tværbjælke", hvor lastfordelingen er bedst tænkelig - i den forstand at den hårdest belastede bjælke aflastes mest muligt af risteværket. Dette grænsetilfælde er let at behandle analytisk, se f.eks. [4]. For dette specialtilfælde gælder for lastandelen P_i på den i 'te bjælke, jfr. figur 3:



Figur 3. Grænsetilfældet ∞ stiv tværbjælke.

$$P_i = \frac{P}{n} + \frac{P \cdot e}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot x_i \quad (2)$$

Kravet til tværbjælkens stivhed udtrykkes som et krav til lastfordelingsparameteren C , når lastandelen for den hårdest påvirkede hovedbjælke højst må overstige værdien for tilfældet ∞ stiv tværbjælke med p %, altså

$$C \geq C_{n\phi dv} = f(n, p) \quad (3)$$

$C_{n\phi dv}$ bestemmes for to typiske lastopstillinger, nemlig

- 1) Last $P = 1$ over yderbjælke
- 2) Last $P = 1$ på midte af tværbjælke

[3] Sten Balle og J.G. Øllgaard: Lastfordelende tværbjælker i bjælkebroer. Kompendium 67/29. Nov. 1969. Danmarks Ingeniørakademi, bygningsafdelingen.

[4] A. Albertsen: Lastfordeling i brodæk. U8502. Januar 1985. Instituttet for Bygningsteknik.

Den første last skal afspejle forholdene for et risteværk med store punktlaster, der kan placeres vilkårligt, f.eks. på et brodæk. Berettigelsen af denne antagelse vurderes nærmere i en senere rapport.

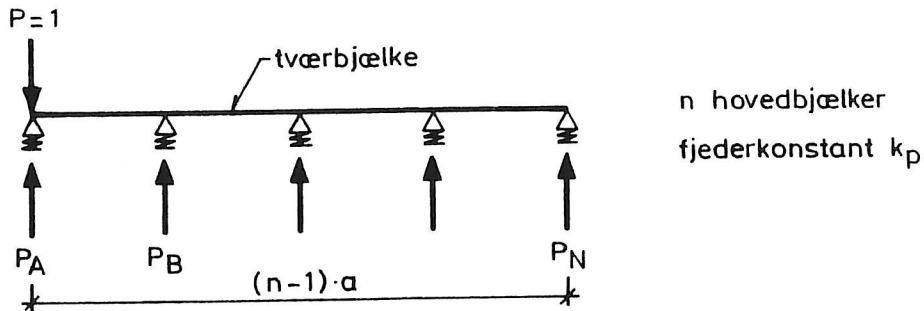
Den anden last skal benyttes til vurdering af risteværker med en centralt placeret punktlast, f.eks. understøtning af en beholder, maskine eller lignende.

Alle undersøgelserne gennemføres for n ens hovedbjælker med $n = 3, 4, 5, \dots, 14$. I praksis har det dog næppe interesse at benytte formlerne for $n > 7$, idet kravet til $C_{n\phi dv}$ bliver urimeligt strengt.

Opstilling af formlerne af typen (3) kræver egentlig ikke nogen særlig stor nøjagtighed, idet det i praksis vil dreje sig om at vælge en tværdragerstivhed, som er på den sikre side - uden dog at give betydende overdimensionering af hovedbjælkerne. Det tjener derfor ikke noget formål at tilpasse formelsystemet meget nøjagtigt til de eksakte resultater fundet ved hjælp af [2]. Formlerne er i hovedsagen fundet empirisk ("trial and error"). Kontrol vha. RIST00 viser, at der er opnået overraskende gode resultater med forholdsvis ukomplicerede udtryk. Som udgangspunkt er benyttet en formel fra [3], hvilket der redegøres for i næste afsnit.

PUNKTLAST OVER YDERBJÆLKE

Fastlæggelse af krav til lastfordelingsparameteren C



Figur 4. Lastsituation 1 - punktlast over yderbjælke.

Først tabelleres resultaterne fra grænsetilfældet $C \rightarrow \infty$ (ensbetydende med $k_p \rightarrow 0$). Dette gøres vha. formel (2).

n	P_{A_0}	
	eksakt	afrundet
3	5:6	0,8333
4	7:10	0,7000
5	3:5	0,6000
6	11:21	0,5238
7	13:28	0,4643
8	5:12	0,4167

n	P_{A_0}	
	eksakt	afrundet
9	17:45	0,3778
10	19:55	0,3455
11	7:22	0,3182
12	23:78	0,2949
13	25:91	0,2747
14	9:35	0,2571

Tabel 1. Yderbjælkens lastandel P_{A_0} , når $C \rightarrow \infty$. Lastsituation 1 iflg. figur 4.

Generel formel, se (33).

Med disse resultater som basisværdier er det vha. RIST00 [2] undersøgt, hvilken C -værdi der mindst skal vælges, når P_A højst må afvige p % fra basisværdien P_{A_0} . Resultaterne er anført i tabel 2.

Antal bjælker	$C_{n\phi dv}$ når tilladt afvigelse fra P_{A_0} er (%)					
	$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 15$	$p = 20$	$p = 30$
3	48,0	16,0	5,33	1,78	0	— *)
4	346	126,8	54	29,4	17,3	5,63
5	1233	462	206	120,8	78	36,7
6	3169	1203	549	331	222	114,9
7	6825	2590	1195	731	500	271
8	12773	4903	2281	1408	973	541
9	22060	8491	3971	2467	1717	972
10	35630	13750	6455	4028	2818	1615
11	54630	21120	9946	6228	4373	2529
12	80350	31100	14683	9219	6493	3782
13	114000	44250	20930	13171	9298	5446
14	157700	61170	28990	18269	12923	7604

*) Ikke aktuelt, da størst mulige afvigelse er 20 %.

Tabel 2. Krav til lastfordelingsparameteren C , når P_A højst må afvige p % fra basisværdien P_{A_0} .

RIST00 kræver angivelse af både bøjnings- og vridningsstivhed for hovedbjælkerne, enten ved angivelse af geometri og inertimomenter eller ved angivelse af parametrene C og D . Sidstnævnte er defineret ved

$$D = \frac{48EI_T}{ak_V} \quad (4)$$

hvor k_V er fjederkonstanten for vridning = det vridningsmoment, der giver vridningsvinkeldrejningen 1 af hoveddrageren i det pågældende krydsningspunkt mellem hoved- og tværdrager. Ved at tillægge D en stor værdi, fås resultater svarende til, at vridningsstivheden negligeres. Her er valgt $D = 1.0 \cdot 10^9$.

At dette er acceptabelt, kan vurderes ved at gå tilbage til de grundlæggende ligningssystemer, se [1], og løse disse for $k_V = 0$. Dette er gjort for nogle udvalgte værdier af n og p , se tabel 3 nedenfor.

n	p	$C^*)$	P_A (kN) for last 100 kN over bjælke A	
			Eksakt $D \rightarrow \infty$ ($k_V = 0$)	Tilnærmet $D = 1,0 \cdot 10^9$
3	2	48,0	85,000000	84,999996
3	15	1,78	95,829428	95,829428
6	2	3169	53,428451	53,428412
6	20	222	62,864958	62,864955
14	2	157700	26,228887	26,228705
14	30	7604	33,428328	33,428314

*) C -værdier fra tabel 2 er benyttet.

Tabel 3. Reaktion P_A ved eksakt og tilnærmet beregning.

Den største afvigelse på værdien af P_A er af størrelsesorden 0,01 promille og fås for $(n, p) = (14, 2)$. Det kan således konstateres, at benyttelse af RIST00 med $D = 1,0 \cdot 10^9$ giver fuldt tilfredsstillende resultater.

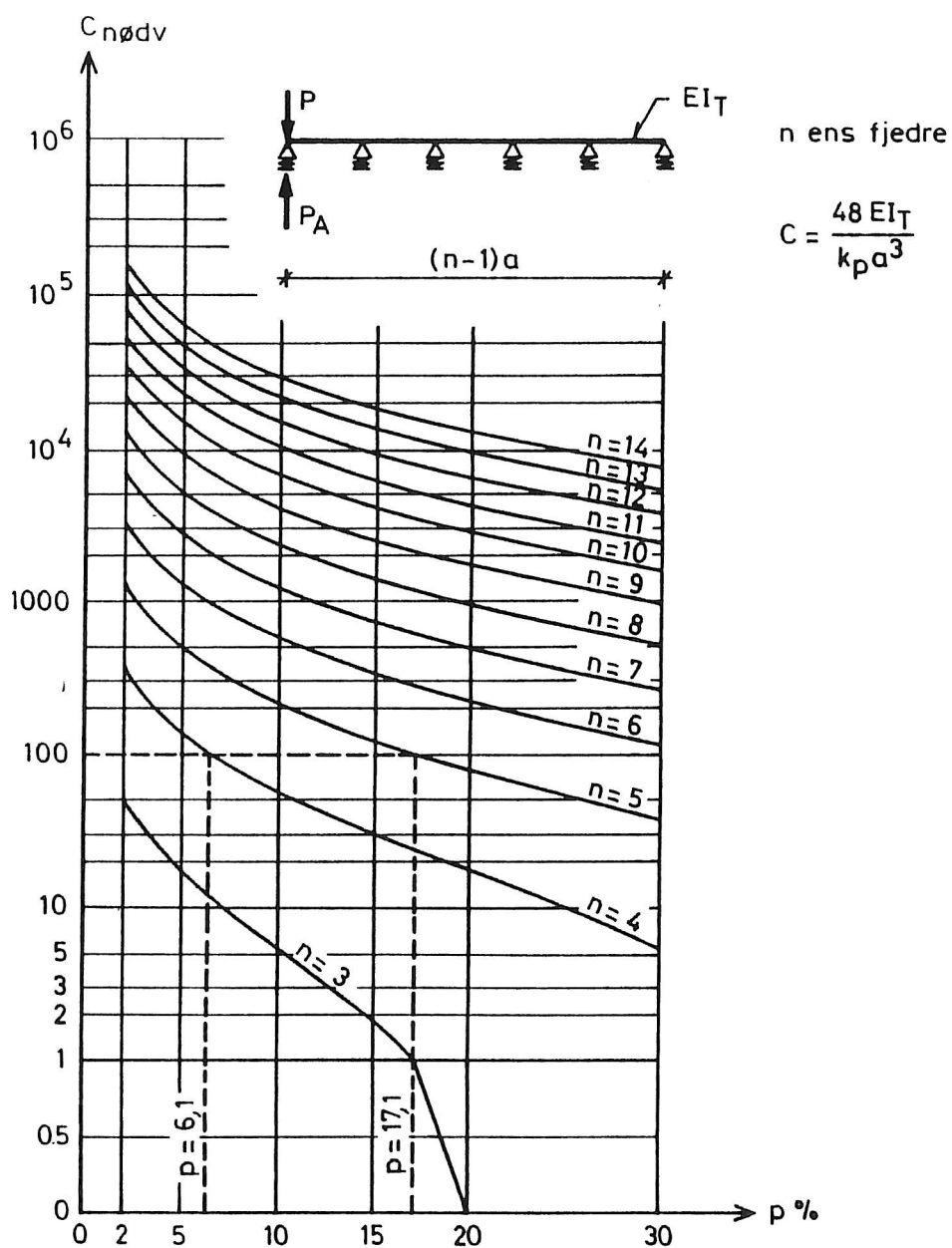
I de fleste tilfælde er C -værdien i tabel 2 afrundet, idet en meget nøjagtig angivelse ikke er nødvendig. For eksempel er for $(n, p) = (6, 2)$ benyttet $C = 3169$, der er en afrunding af den mere nøjagtige værdi $C = 3168,51$. Denne giver med $D = 1,0 \cdot 10^9$ resultatet $P_A = 53,428569$, hvilket er 0,03 promille større end for $C = 3169$. Afrundingen af C -værdien er altså helt uvæsentlig for resultatet, dvs. P_A -værdien.

I princippet kan man bestemme den nødvendige størrelse af C for en ønsket nøjagtighed ved at benytte grundligningerne med C som ubekendt og med P_A som kendt størrelse $= P_{A_0} \cdot (1 + 0,01p)$. F.eks. fås for $(n, p) = (6, 2)$ følgende ligningssystem, se [1]:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 -\frac{C}{2} & \frac{5}{8}C + 32 & 45 & 40 & 23 & -\frac{C}{8} \\
 -\frac{3}{8}C & 45 & \frac{5}{8}C + 72 & 68 & 40 & -\frac{C}{4} \\
 -\frac{C}{4} & 40 & 68 & \frac{5}{8}C + 72 & 45 & -\frac{3}{8}C \\
 -\frac{C}{8} & 23 & 40 & 45 & \frac{5}{8}C + 32 & -\frac{C}{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P_{A_0} \cdot 1,02 \\
 P_B \\
 P_C \\
 P_D \\
 P_E \\
 P_F
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 100 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Dette giver dog unødigt besværlige beregninger, og det vælges i stedet - se mere herom senere - at udvikle tilnærmelsesformler til bestemmelse af $C_{n\phi dv}$.

Resultaterne i tabel 2 kan afbildes i en graf som vist på figur 5, dvs. $C_{n\phi dv}$ kan aflæses som funktion af n og p .



Figur 5. Nødvendig størrelse af lastparameteren C som funktion af bjælkeantal n og accepteret afvigelse p % fra basistilfældet $C \rightarrow \infty$.

Desuden kan grafen benyttes til bestemmelse af P_A , når C er kendt, idet

$$P_A = (1 + 0,01p)P_{A_0} \quad (5)$$

hvor P_{A_0} fås af tabel 1.

Eksempelvis fås for $C = 100$ og $n = 4$ værdien $p = 6,1$ - se figur 5 - og dermed $P_A = 1,061 \cdot 0,7000 P = 0,7427 P$. Tilsvarende fås for $C = 100$ og $n = 4$ værdien $p = 17,1$ og dermed $P_A = 1,171 \cdot 0,6000 P = 0,7026 P$.

Udvikling af tilnærmelsesformel til bestemmelse af $C_{n\phi dv}$

I stedet for at benytte en graf til bestemmelse af $C_{n\phi dv}$ kan det have interesse at opstille et analytisk udtryk, f.eks. til brug ved overslagsberegninger, eventuelt i forbindelse med et edb-program.

Der tages udgangspunkt i følgende udtryk, der er hentet fra [3] og angives at gælde for $3 \leq n < 12$:

$$\frac{I_T}{I_L} \left(\frac{L_L}{L_T} \right)^3 > \frac{13(n-2)}{p} \quad (6)$$

Udtrykket gælder for et 1-fags ortogonalt risteværk med ens, ækvidistante hovedbjælker og én tværbjælke. I_T og I_L er bøjningsinertimoment af hhv. tværbjælke og hovedbjælker; L_T er tværbjælkens længde, og L_L er hovedbjælkernes "ækvivalente" længde, der afhænger af hovedbjælkernes understøtningsforhold. Fastsættelsen af L_L hænger sammen med fjederkonstanten k_p på følgende måde

$$L_L^3 = \frac{48EI_L}{k_p} \quad (7)$$

Når dette indsættes i (6), fås med $L_T = (n-1)a$

$$\frac{48EI_T}{k_p a^3} = C > \frac{13}{p} \cdot (n-1)^3 (n-2) \quad (8)$$

Dette udtryk er vha. RIST00 afprøvet for en række tilfælde. Resultatet er angivet i tabel 4a og tabel 4b.

Tilstræbt→	$p = 2$		$p = 5$		$p = 10$	
Faktisk $p = p_f$	C	p_f	C	p_f	C	p_f
n = 3	52,0	1,9	20,8	4,1	10,4	6,8
4	351	2,0	140,4	4,6	70,2	8,2
5	1248	2,0	499	4,7	249,6	8,5
6	3250	1,9	1300	4,7	650	8,7
7	7020	1,9	2808	4,6	1404	8,7
8	13377	1,9	5351	4,6	2675	8,7
9	23296	1,9	9318	4,6	4659	8,7
10	37908	1,9	15163	4,6	7582	8,7
11	58500	1,9	23400	4,5	11700	8,6
12	86515	1,9	34606	4,5	17303	8,6
13	123552	1,9	49421	4,5	24710	8,6
14	171366	1,8	68546	4,5	34273	8,6

Tabel 4a. Afprøvning af formel (8).

Tilstræbt→	$p = 15$		$p = 20$		$p = 30$	
Faktisk $p = p_f$	C	p_f	C	p_f	C	p_f
n = 3	6,93	8,7	5,20	10,1	3,47	12,1
4	46,8	11,0	35,1	13,4	23,4	17,1
5	166,4	11,8	124,8	14,7	83,2	19,3
6	433,3	12,1	325,0	15,2	216,7	20,3
7	936	12,3	702	15,5	468,0	21,0
8	1784	12,3	1338	15,6	892	21,3
9	3106	12,4	2330	15,7	1553	21,6
10	5054	12,4	3791	15,8	2527	21,7
11	7800	12,4	5850	15,8	3900	21,9
12	11535	12,4	8652	15,8	5768	21,9
13	16474	12,4	12355	15,8	8237	22,0
14	22849	12,4	17137	15,8	11424	22,1

Tabel 4b. Fortsættelse af tabel 4a.

Det ses, at formel (8) i alle de undersøgte tilfælde er på den sikre side, således at forstå at man overalt får mindre værdier af lastandelen P_A end forudsat, når formelen benyttes til at bestemme den nødvendige stivhed af tværbjælken. Til gengæld fås lidt større påvirkning af tværbjælken - herom senere i dette afsnit.

I praksis er der således intet til hinder for at benytte formel (8) - med den udtrykkelige forudsætning, at den omhandlede lastsituation er dækkende.

For $p \leq 10$ er formelen acceptabel, medens den for $p > 10$ giver noget for store værdier. Der kan derfor være behov for en justering af udtrykket (8). Dette gøres ved hjælp af en faktor, der åbenbart skal antage værdier meget nær 1 for små p -værdier.

Efter nogle overvejelser - baseret på en optegning af forholdet (C_{eksakt} iflg. tabel 2):(C iflg. tabel 4) der viser, at dette forhold varierer meget nær lineært med p med nogen afhængighed af n - vælges det at benytte følgende simple faktor

$$f = 1 - \frac{p}{72} \quad (9)$$

og dermed altså

$$C_{n\phi dv} = \frac{13}{p} \cdot \left(1 - \frac{p}{72}\right) \cdot (n-1)^3 \cdot (n-2)$$

der omskrives til

$$C_{n\phi dv} = \left(\frac{13}{p} - 0,18\right) \cdot (n-1)^3 \cdot (n-2) \quad (10)$$

Talstørrelsen 72 i (9) er valgt for at give god overensstemmelse for de tilfælde, der formodes at være mest aktuelle i praksis, nemlig $n \leq 7$. Afprøvning af formelen sker i tabel 5a og 5b.

Tilstræbt→	$p = 2$		$p = 5$		$p = 10$	
Faktisk $p = p_f$	C	p_f	C	p_f	C	p_f
n = 3	50,6	1,9	19,4	4,3	8,96	7,5
4	341	2,0	130,7	4,9	60,5	9,1
5	1213	2,0	465	5,0	215	9,7
6	3160	2,0	1210	5,0	560	9,8
7	6826	2,0	2614	5,0	1210	9,9
8	13007	2,0	4980	4,9	2305	9,9
9	22651	1,9	8673	4,9	4014	9,9
10	36858	1,9	14113	4,9	6532	9,9
11	56880	1,9	21780	4,9	10080	9,9
12	84119	1,9	32210	4,8	14907	9,9
13	120131	1,9	45999	4,8	21289	9,8
14	166620	1,9	63801	4,8	29528	9,8

Tabel 5a. Afprøvning af formel (10).

Tilstræbt→	$p = 15$		$p = 20$		$p = 30$	
Faktisk $p = p_f$	C	p_f	C	p_f	C	p_f
n = 3	5,49	9,9	3,76	11,7	ikke aktuel jf. tabel 2	
4	37,1	12,9	25,4	16,3	13,7	22,3
5	131,8	14,1	90,2	18,3	48,6	26,2
6	343	14,6	235	19,2	126,7	28,4
7	742	14,8	508	19,8	274	29,8
8	1413	15,0	967	20,1	521	30,7
9	2461	15,0	1684	20,3	908	31,4
10	4005	15,1	2741	20,4	1477	31,8
11	6180	15,1	4230	20,5	2280	32,2
12	9140	15,1	6256	20,6	3372	32,5
13	13052	15,1	8934	20,6	4815	32,7
14	18103	15,1	12391	20,7	6679	32,9

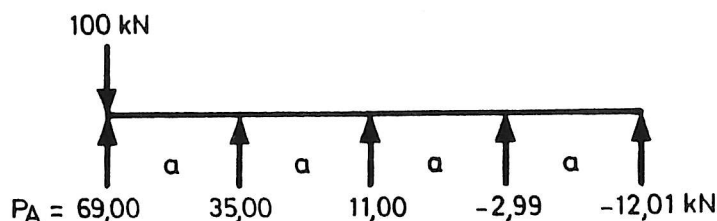
Tabel 5b. Afprøvning af formel (10) (fortsat).

Det ses, at formel (10) giver resultater, der for $n = 7$ samt for $p \leq 10$ er på den sikre side, idet benyttelse af formelen fører frem til lidt stivere tværbjælke, end der er behov for, dvs. lastfordelingen bliver lidt bedre end forudsat. Til gengæld bliver styrkedimensioneringen af tværbjælken på den usikre side. Dette illustreres med følgende eksempel, hvor der med $n = 5$ er forudsat $p = 15$.

a) "Eksakt":

$$C = 120,8$$

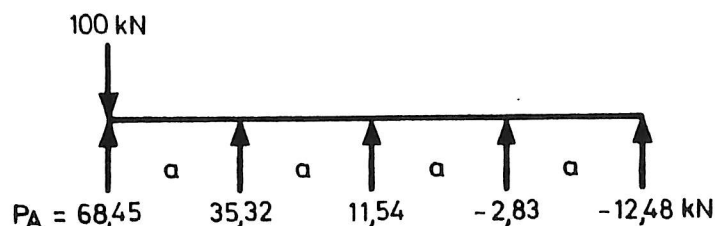
$$p = 15$$



b) Tilnærmet:

$$C = 131,8$$

$$p = 14,1$$



Figur 6. Taleksempel med eksakt hhv. tilnærmet C -værdi.

Det numerisk største moment i tværbjælken fås ved første mellemunderstøtning og bliver i tilfældene a og b henholdsvis $M_T = -31,00 a$ og $-31,55 a$. Den relative forøgelse (1,8%) af M_T er større end den relative formindskelse af P_A (0,8%). Forøgelsen af M_T fører ikke nødvendigvis til større dimensioner af tværbjælken, idet stivhedskravet $EI_T \geq Ck_p a^3$: 48 ofte vil være udslagsgivende.

Bestemmelsen af $C_{n\phi dv}$ efter formel (10) er i de fleste tilfælde meget nøjagtig; dog fås for $n = 3$ og $n = 4$ noget upræcise resultater, når $p \geq 10$. Desuden fås især for $p = 30$ en undervurdering af lastandelen P_A , når n er stor.

For $n = 14$ fås således med tilstræbt $p = 30$ en faktisk værdi $p_f = 32,9$, dvs. i stedet for lastandel $1,30 \cdot P_{A_0}$ fås $1,329 \cdot P_{A_0}$ - en forøgelse på 2,2%. Hertil svarer, når C vælges efter formel (10), en formindskelse af tværbjælkens moment på 3,1%. Disse forskelle anses dog ikke at være så betydende, at de kan begrunde yderligere justering af formelen, idet det ikke har været hensigten at opstille en formel, der dækkede mere end op til $n = 7$.

For $n = 4$ og især for $n = 3$ fås et for strengt krav til C , når $p > 5$. Dette er dog ingen større ulempe, idet man let kan opstille et eksplicit, eksakt, udtryk for $C_{n\phi dv}$ ud fra de grundlæggende ligninger i [1].

For $n = 3$ fås

$$C_{n\phi dv} = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{20}{p} - 1 \right) \quad (11)$$

For $n = 4$ fås $C_{n\phi dv}$ ved løsning af ligningen

$$\underline{7 C_{n\phi dv}^2 + \left(156,8 - \frac{5120}{p}\right) C_{n\phi dv} + 336 - \frac{14400}{p} = 0} \quad (12)$$

Afsluttende bemærkninger

Som tidligere anført har ønsket om at udvikle en simpel formel vejet tungere end ønsket om at opnå stor nøjagtighed for alle de valgte kombinationer af n og p . Det skal dog nævnes, at der i en tidligere fase af projektet ved en mere systematisk fremgangsmåde er udviklet en noget mere kompliceret formel dækkende området $n \leq 10$ og $2 \leq p \leq 20$. Denne har følgende udseende

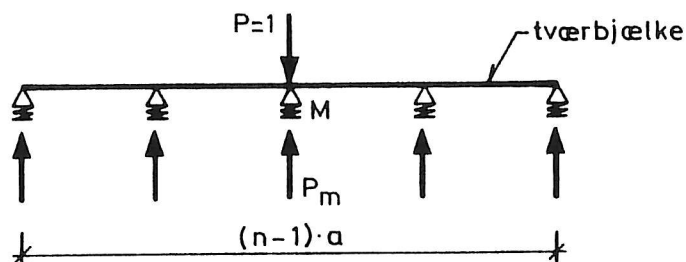
$$C_{n\phi dv} = 0,26 \cdot \frac{51-p}{p} (n^2 - 7,3)(n^2 - 4n + 6) \left(1 + \frac{n-5}{21n-51} \cdot \frac{p^2-100}{p+34}\right) \quad (13)$$

Med dette udtryk fås god overensstemmelse med de eksakte værdier, også for $n = 3$.

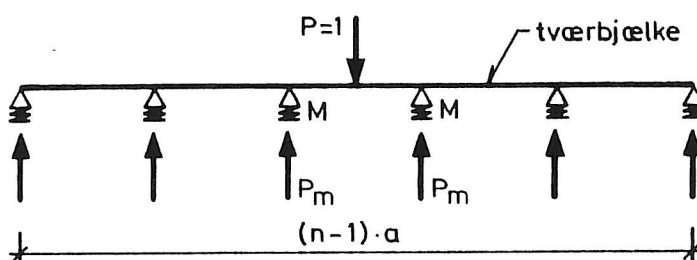
PUNKTLAST MIDT PÅ TVÆRBJÆLKE

Bestemmelse af krav til lastfordelingsparameteren C

n ulige



n lige



Figur 7. Lastsituation 2 - punktlast midt på tværbjælke.
 n ens hovedbjælker/fjedre, fjederkonstant k_p .

Som det fremgår af figur 7, er det nødvendigt at dele undersøgelsen i to dele, nemlig a) n ulige og b) n lige, idet beregningerne forløber lidt forskelligt.

Undersøgelsen vedrører midterbjælken/midterbjælkerne M , idet denne/disser skal optage større lastandel end de øvrige.

Grænsetilfældet $C \rightarrow \infty$ (ensbetydende med $k_p \rightarrow 0$) giver dog samme resultat, uanset om n er lige eller ulige, idet det umiddelbart indses, at grænseværdien P_{m_0} må være

$$P_{m_0} = \frac{P}{n} \quad (14)$$

Beregningsmæssigt fås dette af ligning (2) med $e = 0$.

n ulige

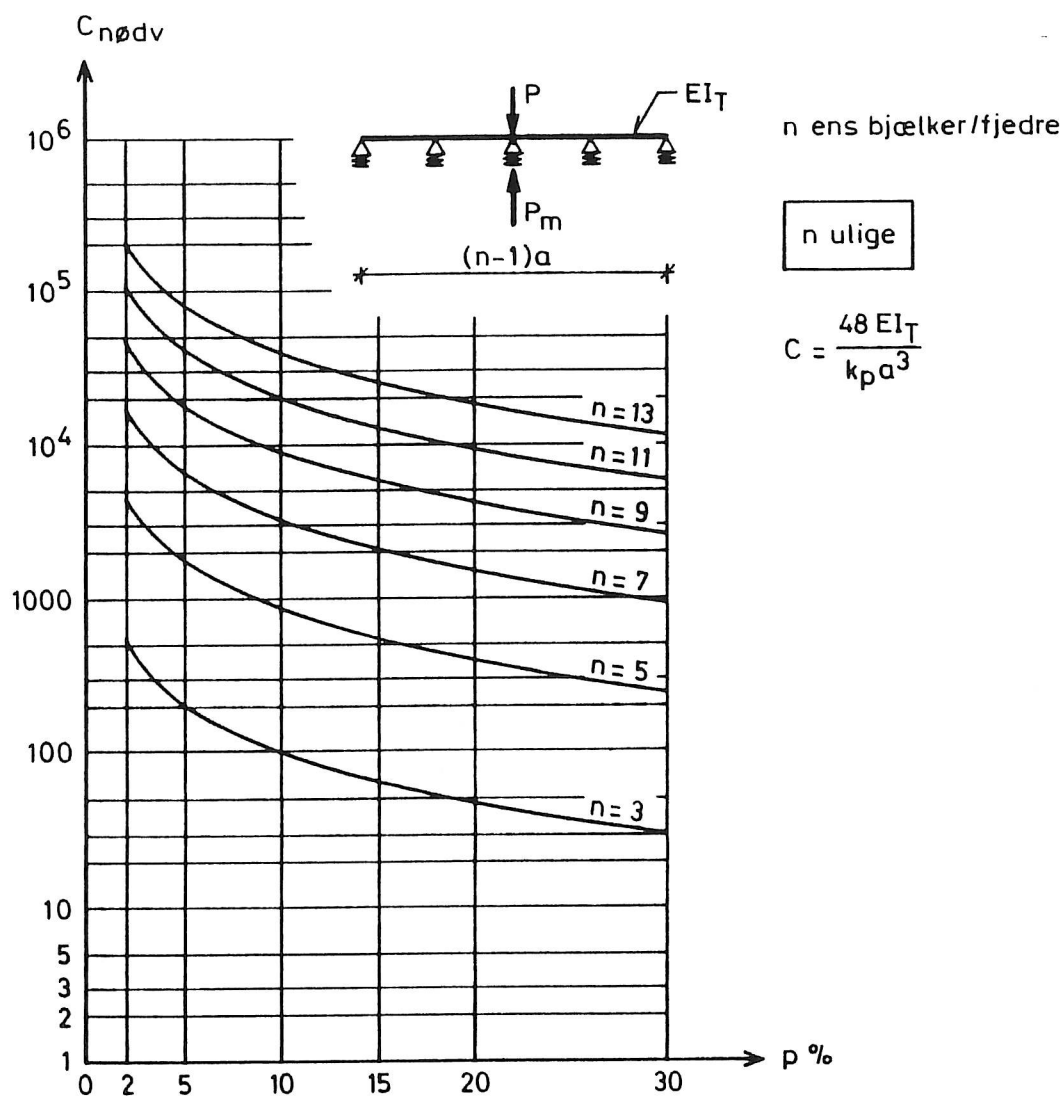
Nedenstående tabel 6 angiver den nødvendige C -værdi, når afvigelsen fra grænseværdien P_{m_0} må være p %. Undersøgelsen er gennemført vha. RIST00 [2] med $n = 3; 5, 7, 9, 11$ samt 13 og med $p = 2, 5, 10, 15, 20$ samt 30 .

Antal bjælker	$C \rightarrow \infty$ P_{m_0}	$C_{n\phi dv}$ når tilladt afvigelse fra P_{m_0} er (%)					
		$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 15$	$p = 20$	$p = 30$
3	1:3	528	208	101,3	65,8	48,0	30,2
5	1:5	4430	1742	846	547	398	249
7	1:7	17397	6836	3316	2142	1556	970
9	1:9	47960	18840	9134	5900	4283	2668
11	1:11	107500	42230	20470	13217	9592	5971
13	1:13	210300	82580	40020	25840	18751	11669

Tabel 6. Krav til lastfordelingsparameteren C , når P_m højst må afvige p % fra basisværdien P_{m_0} .

Også i disse beregninger er parameteren for relativ vridningsstivhed sat til $D = 1,0 \cdot 10^9$, hvor den korrekte værdi skulle være $D \rightarrow \infty$. På baggrund af resultaterne i tabel 3 skønnes dette tilladeligt; en kontrolberegning for $n = 14$ og $p = 2$ vil dog blive gennemført senere.

Resultaterne i tabel 6 afbildes i en graf, se figur 8.



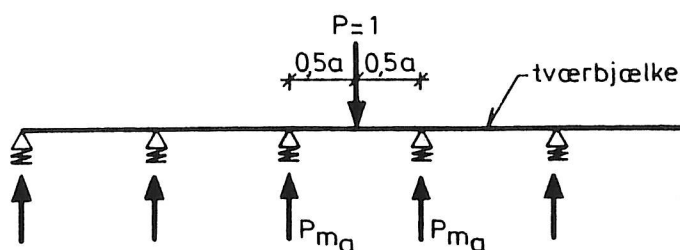
Figur 8. Nødvendig størrelse af lastfordelingsparameteren C som funktion af bjælkeantal n og accepteret afvigelse p % fra basistilfældet $C \rightarrow \infty$. n ulige

Som tidligere bemærket kan grafen også benyttes til bestemmelse af p og dermed reaktionen P_m , når C er kendt. Bemærk, at figur 8 ikke kan benyttes for n lige. (For n lige benyttes figur 10.)

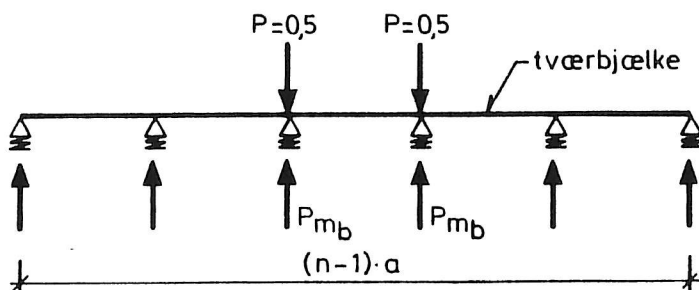
n lige

Dette tilfælde adskiller sig fra det forrige ved, at lasten ikke står lige over en hoveddrager. Det skønnes at have interesse at skelne mellem 2 tilfælde, se figur 9.

2a



2b



Figur 9. Lastsituation for last midt på tværbjælke.
 n ens hovedbjælker/fjedre, fjederkonstant k_p .

For $C \rightarrow \infty$ vil de to lastsituationer give identiske resultater mht. lastfordelingen på hoveddragerne. For endelige C -værdier vil der derimod være en forskel. F.eks. fås for $n = 6$, $C = 20$ (og $D = 1,0 \cdot 10^9$) følgende resultat:

$$2a: P_{m_o} = 0,39636$$

$$2b: P_{m_b} = 0,36464$$

Beregningerne med RIST00 [2] giver følgende resultat mht. $C_{n\phi dv}$, se tabel 7 og 8:

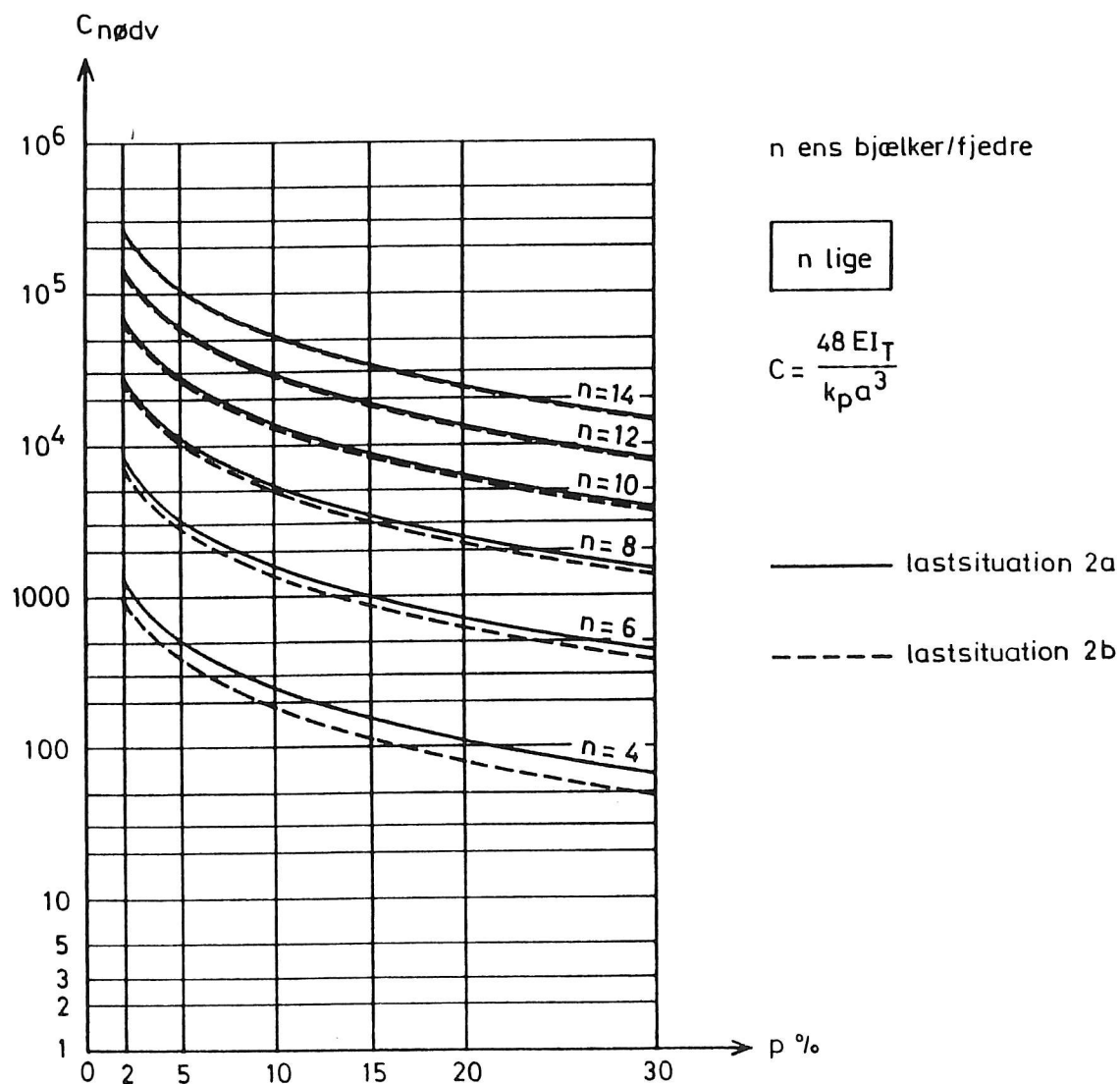
Antal bjælker	$C \rightarrow \infty$ P_{m_o}	$C_{n\phi dv}$ for lastsituation 2a (figur 9)					
		$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 15$	$p = 20$	$p = 30$
4	1:4	1280	500	240	153	110	66,7
6	1:6	8125	3183	1536	987	713	439
8	1:8	27640	10840	5241	3374	2442	1509
10	1:10	69800	27380	13250	8538	6183	3830
12	1:12	147500	57900	27900	18060	13080	8112
14	1:14	276000	108400	52500	33840	24520	15210

Tabel 7. Krav til lastfordelingsparameteren C , når P_{m_a} højst må afvige p % fra basissværdien P_{m_o} .

Antal bjælker	$C \rightarrow \infty$ P_{m_0}	$C_{n\phi dv}$ for lastituation 2b					
		$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 15$	$p = 20$	$p = 30$
4	1:4	980	380	180	113,3	80,0	46,7
6	1:6	7222	2822	1355	866	622	378
8	1:8	25840	10120	4878	3132	2259	1386
10	1:10	66780	26180	12640	8132	5877	3624
12	1:12	142900	56000	27100	17440	12620	7800
14	1:14	269700	105800	51200	32980	23870	14780

Tabel 8. Krav til lastfordelingsparameteren C , når P_{m_0} højst må afvige p % fra basisværdien P_{m_0} .

Resultaterne i tabel 7 og 8 afbildes i nedenstående graf.



Figur 10. Nødvendig størrelse af lastfordelingsparameteren C som funktion af bjælkeantal n og accepteret afvigelse p % fra basistilfældet $C \rightarrow \infty$. n lige

Grafen kan også benyttes til bestemmelse af p og dermed P_m , når C er kendt, idet

$$P_m = (1 + 0,01 p) P_{m_0} \quad (15)$$

Det ses, at kravet til $C_{n\phi dv}$ overalt er størst i lastsituation 2a. Forskellen mellem lastsituation 2a og 2b er størst for $n = 4$, og selv i dette tilfælde er afvigelsen i resultatet, dvs. lastfordelingen, beskeden. Dette kan f.eks. ses ved at benytte $C = 66,7$ i både situation 2a og 2b. I "2a" fås $P_{m_a} = 1,30 \cdot P_{m_0}$ og i "2b" fås $P_{m_b} = 1,27 \cdot P_{m_0}$ - en afvigelse på kun 3 %.

For at vurdere det tilladelige i at benytte vridningsparameteren $D = 1,0 \cdot 10^9$ i stedet for grænseværdien for $D \rightarrow \infty$ er der foretaget en beregning efter [1] i lasttilfælde 2b med $n = 14$ og $C = 270000$ samt $k_v = 0$. Resultatet er sammenlignet med en beregning vha. RIST00, se tabel 9. C -værdien svarer til $p = 1,998$.

n	C	Lastsituation 2b: P_m (kN) for last $2 \cdot 50$ kN	
		Eksakt $D \rightarrow \infty$ ($k_v = 0$)	Tilnærmet $D = 1,0 \cdot 10^9$
14	270000	7,285577	7,285576

Tabel 9. Reaktion P_m ved eksakt hhv. tilnærmet beregning.

Udvikling af tilnærmelsesformler til bestemmelse af $C_{n\phi dv}$

n ulige

Der søges nu en funktion $C_{n\phi dv} = C(n, p)$, som med rimelig nøjagtighed giver de værdier, som fremgår af tabel 6. Med udgangspunkt i denne beregnes de relative C -værdier, når enten bjælkeantallet n varierer, eller den accepterede afvigelse p (%) varierer. Det viser sig, at forholdet $C_{n_1} : C_{n_2}$ er praktisk taget uafhængigt af p , samt at forholdet $C_{p_1} : C_{p_2}$ er praktisk taget uafhængigt af n , se tabel 10 og 11.

n		$p = 2$	$p = 5$	$p = 10$	$p = 15$	$p = 20$	$p = 30$
3	$C_9 : C_3$	91	91	90	90	89	88
5	$C_9 : C_5$	10,8	10,8	10,8	10,8	10,8	10,7
7	$C_9 : C_7$	2,76	2,76	2,75	2,75	2,75	2,75
9	$C_9 : C_9$	1	1	1	1	1	1
11	$C_9 : C_{11}$	0,446	0,446	0,446	0,446	0,447	0,447
13	$C_9 : C_{13}$	0,228	0,228	0,228	0,228	0,228	0,229

Tabel 10. Relative C -værdier \sim uafhængige af p .

n	$\frac{C_{p=2}}{C_{p=2}}$	$\frac{C_{p=2}}{C_{p=5}}$	$\frac{C_{p=2}}{C_{p=10}}$	$\frac{C_{p=2}}{C_{p=15}}$	$\frac{C_{p=2}}{C_{p=20}}$	$\frac{C_{p=2}}{C_{p=30}}$
3	1	2,54	5,2	8,0	11,0	17,5
5	1	2,54	5,2	8,1	11,1	17,8
7	1	2,54	5,3	8,1	11,2	17,9
9	1	2,55	5,3	8,1	11,2	18,0
11	1	2,55	5,3	8,1	11,2	18,0
13	1	2,55	5,3	8,1	11,2	18,0

Tabel 11. Relative C -værdier $C_p = 2 : C_p \sim$ uafhængige af n .

Dette resultat gør det nærliggende at opstille et udtryk for $C_{n\phi dv}$ som et produkt af 2 funktioner, $f(n)$ og $g(p)$:

$$C_{n\phi dv} = f(n) \cdot g(p) \quad (16)$$

Der forsøges med en formelopbygning af samme type som i (10), nemlig

$$C_{n\phi dv} = \left(\frac{k}{p} - c \right) (n - a)^3 (n - b) \quad (17)$$

hvor konstanterne a , b , c og k skal bestemmes.

Variation af n :

$$C_n = g(p)(n - a)^3(n - b) \quad (18)$$

dvs.

$$C_3 = g(p)(3 - a)^3(3 - b) \quad (18.3)$$

$$C_5 = g(p)(5 - a)^3(5 - b) \quad (18.5)$$

$$- - - - \quad (18.7)$$

$$C_{13} = g(p)(13 - a)^3(13 - b) \quad (18.13)$$

Heraf udvælges ligning (18.3), (18.7) og (18.9) til bestemmelse af konstanterne a og b :

$$\begin{aligned} C_9 &= 90 \cdot C_3 \Rightarrow (9 - a)^3(9 - b) = 90 \cdot (3 - a)^3(3 - b) \\ C_9 &= 2,75 \cdot C_7 \Rightarrow (9 - a)^3(9 - b) = 2,75 \cdot (7 - a)^3(7 - b) \end{aligned} \quad (19)$$

Her er faktorerne 90 og 2,75 hentet fra tabel 10.

Det er fundet, at talsættet $a = 0,5$ og $b = -1,65$ giver god overensstemmelse. Da der ikke kræves meget stor nøjagtighed, afrundes den fundne b -værdi til $-1,67$, hvorved (17) kan skrives

$$\begin{aligned} C_n &= \left(\frac{k}{p} - c \right) (n - 0,5)^3(n + 1,67) \Rightarrow \\ C_n &= \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{k}{p} - c \right) (2n - 1)^3(3n + 5) \end{aligned} \quad (20)$$

Variation af p :

Til bestemmelse af k og c vælges værdierne for $(n, p) = (3, 2)$ og $(n, p) = (9, 10)$ i tabel 6.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{k}{2} - c \right) \cdot 1750 &= 528 \\ \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{k}{10} - c \right) \cdot 157216 &= 9134 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \text{Løsning: } k &= 14,617 \\ c &= 0,0673 \end{aligned}$$

Disse værdier indføres i (20), der med en mindre afrunding får udseendet

$$C_{n\phi dv} = \left(\frac{0,61}{p} - 0,003 \right) \cdot (2n - 1)^3 (3n + 5) \quad (21)$$

gældende for n ulige.

Afprøvning af formel (21) sker i tabel 12a og 12b.

Tilstræbt→	$p = 2$		$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f	C	p_f
3	529	2,0	208	5,0	101,5	10,0	65,9	15,0
5	4403	2,0	1735	5,0	846	10,0	549	15,0
7	17251	2,0	6798	5,0	3313	10,0	2152	14,9
9	47479	2,0	18709	5,0	9119	10,0	5922	14,9
11	106279	2,0	41878	5,0	20411	10,0	13256	15,0
13	207625	2,0	81813	5,0	39875	10,0	25896	15,0

Tabel 12a. Afprøvning af formel (21); p_f er den faktiske p -værdi.

Tilstræbt→	$p = 20$		$p = 30$		$p = 50$		$p = 100$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f	C	p_f
3	48,1	20,0	30,3	29,9	16,1	49,8	5,43	99,1
5	401	19,9	253	29,6	134,1	48,8	45,2	96,0
7	1571	19,8	990	29,5	526	48,4	177	94,8
9	4323	19,8	2725	29,5	1446	48,3	487	94,3
11	9678	19,8	6100	29,5	3238	48,3	1091	94,1
13	18906	19,9	11917	29,5	6325	48,3	2131	94,0

Tabel 12b. Afprøvning af formel (21); p_f er den faktiske p -værdi.

Konklusion vedr. formel (21):

- Den rammer næsten i plet for $p \leq 20$
- Formlen kan med god tilnærmelse bruges op til $p = 50$
- Selv for $p = 100$ bliver fejlen i max. last på hovedbjælker mindre end 3% af det forventede resultat
- Formlen er i alle de undersøgte tilfælde på den sikre side (baseret på den valgte nøjagtighed af p_f)

I lighed med tidligere er det enkelt at opstille et eksplicit udtryk for $C_{n\phi dv}$ ud fra de grundlæggende ligninger, når $n = 3$. Resultatet bliver

$$C_{n\phi dv} = \frac{16}{3} \left(\frac{200}{p} - 1 \right) \quad (22)$$

n lige

Lastsituation 2a (figur 9)

Inden der foretages en nærmere undersøgelse, benyttes forsøgsvis formel (21) til at vælge C -værdier for lastsituation 2a (figur 9). Resultatet fremgår af tabel 13a og 13b.

Tilstræbt →	$p = 2$		$p = 5$		$p = 10$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f
4	1761	1,5	694	3,6	338	7,3
6	9245	1,8	3643	4,4	1776	8,7
8	29558	1,9	11647	4,7	5677	9,3
10	72500	1,9	28568	4,8	13924	9,5
12	150652	2,0	59363	4,9	28933	9,7
14	279381	2,0	110087	4,9	53656	9,8

Tabel 13a. Afprøvning af formel (21) for lastsituation 2a; p_f er den faktiske p -værdi.

Tilstræbt →	$p = 15$		$p = 20$		$p = 30$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f
4	220	10,8	160	14,4	101,1	21,5
6	1153	13,0	842	17,3	531	25,7
8	3687	13,8	2692	18,4	1697	27,3
10	9042	14,2	6602	18,9	4161	28,0
12	18790	14,5	13718	19,2	8647	28,5
14	34845	14,6	25440	19,4	16035	28,7

Tabel 13b. Afprøvning af formel (21) for lastsituation 2a; p_f er den faktiske p -værdi.

Formel (21) er anvendelig, især for $n \geq 8$, og resultaterne er alle på den sikre side, hvad angår den mest belastede bjælkes lastandel. Det modsatte er som tidligere nævnt tilfældet for bøjningsmomentet i tværbjælken, og der søges derfor opstillet et nøjagtigere resultat.

Fremgangsmåden er den samme som for n ulige, og der tages udgangspunkt i tabel 7. Som tidligere viser det sig bekvemt at opstille et udtryk af typen (17), idet man med tilnærmelse får

$$55 C_4 = 8,6 \quad C_6 = 2,53 \quad C_8 = C_{10} = 0,473 \quad C_{12} = 0,252 \quad C_{14}$$

uanset p -værdi samt

$$C_{p=2} = 2,55 \quad C_{p=5} = 5,3 \quad C_{p=10} = 8,2 \quad C_{p=15} = 11,3 \quad C_{p=20} = 18,2 \quad C_{p=30}$$

uanset n -værdi

Variation af n :

Forholdet $55 C_4 = 2,53 C_8 = C_{10}$ tages som udgangspunkt. Løsning $a \simeq -0,667$ og $b \simeq 2,333$, dvs. formelen for $C_{n\phi dv}$ får foreløbig dette udseende

$$C_n = \left(\frac{k}{p} - c \right) (n + 0,667)^3 (n - 2,333) \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{k}{p} - c \right) (3n + 2)^3 (3n - 7) \quad (23)$$

Variation af p :

Til bestemmelse af k og c vælges værdierne for $(n,p) = (8,2)$ og $(n,p) = (10,10)$ i tabel 7. Dette fører til følgende resultat:

$$k = 15,171$$

$$c = 0,0925$$

der indsat i (23) med en mindre afrunding giver

$$C_{n\phi dv} = \frac{1}{81} \left(\frac{15,2}{p} - 0,093 \right) (3n + 2)^3 (3n - 7) \quad (24)$$

gældende for n lige, lastsituation 2a.

Afprøvning af formel (24) sker i tabel 14a og 14b.

	Lastsituation 2a (figur 9)							
Tilstræbt→	$p = 2$		$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f	C	p_f
4	1272	2,0	499	5,0	242	9,9	155,9	14,8
6	8156	2,0	3202	5,0	1550	9,9	1000	14,8
8	27692	2,0	10871	5,0	5264	10,0	3395	14,9
10	69849	2,0	27420	5,0	13278	10,0	8563	15,0
12	147479	2,0	57895	5,0	28034	10,0	18080	15,0
14	276317	2,0	108473	5,0	52525	10,0	33876	15,0

Tabel 14a. Afprøvning af formel (24); p_f er den faktiske p -værdi.

	Lastsituation 2a (figur 9)							
Tilstræbt→	$p = 20$		$p = 30$		$p = 50$		$p = 100$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f	C	p_f
4	113,0	19,5	70,1	28,9	35,7	46,7	10,0	86,7
6	725	19,7	449	29,4	229	48,6	64,1	96,4
8	2460	19,9	1526	29,7	778	49,4	218	100,2
10	6206	19,9	3849	29,9	1963	49,8	549	102,1
12	13104	20,0	8127	29,9	4145	50,0	1159	103,1
14	24551	20,0	15226	30,0	7766	50,1	2172	103,7

Tabel 14b. Afprøvning af formel (24); p_f er den faktiske p -værdi.

Konklusionen vedr. formel (24) er næsten den samme som for formel (21), blot er (24) en smule - ca. 2% - på den usikre side, når $p = 100$.

For de laveste n -værdier kan der opstilles et simpelt udtryk til direkte bestemmelse af $C_{n\phi dv}$, nemlig for

$$\underline{n = 4}: \quad C_{n\phi dv} = 20 \cdot \left(\frac{130}{p} - 1 \right) \quad (25)$$

og for

$$\underline{n = 6}: \quad 3C^2 + \left(352 - \frac{49400}{p} \right) C + 1216 - \frac{315200}{p} = 0 \quad (26)$$

begge gældende for lastsituation 2a (figur 9)

Lastsituation 2b (figur 9)

Med tilnærmelse fås uanset p -værdi

$$70 C_4 = 9,3 \quad C_6 = 2,59 \quad C_8 = C_{10} = 0,466 \quad C_{12} = 0,247 \quad C_{14}$$

og uanset n -værdi *

$$C_{p=2} = 2,55 \quad C_{p=5} = 5,3 \quad C_{p=10} = 8,2 \quad C_{p=15} = 11,3 \quad C_{p=20} = 18,2 \quad C_{p=30}$$

I lighed med tidligere søges der da opstillet udtryk af typen (17), dvs.

$$C_{n\phi dv} = \left(\frac{k}{p} - c \right) (n - a^3)(n - b)$$

Variation af n :

Relationen $70 C_4 = 2,59 C_8 = C_{10}$ tages som udgangspunkt. Herefter kan a og b bestemmes som $(a, b) = (-0,525, 2,685)$. Med lidt afrunding fås udtrykket

$$C_n = \frac{1}{192} \left(\frac{k}{p} - c \right) (4n + 2,1)^3 (3n - 8) \quad (27)$$

der benyttes til den fortsatte undersøgelse.

Variation af p

Til bestemmelse af k og c vælges her værdierne fra tabel 8 for $(n,p) = (6,2)$ og $(n,p) = (10,30)$. Dette fører til følgende resultat

$$k = 15,804$$

$$c = 0,1029$$

der indsat i (27) med en mindre afrunding giver

$$C_{n\phi dv} = \frac{1}{192} \left(\frac{15,82}{p} - 0,103 \right) (4n + 2,1)^3 (3n - 8) \quad (28)$$

gældende for n lige, lastsituation 2b.

Afprøvning af formel (28) sker i tabel 15a og 15b.

* Overensstemmelsen er dårligst for $n = 4$ og $n = 6$. For disse værdier kan der imidlertid opstilles simple udtryk til direkte bestemmelse af $C_{n\phi dv}$.

	Lastsituation 2b (figur 9)							
Tilstræbt →	$p = 2$		$p = 5$		$p = 10$		$p = 15$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f	C	p_f
4	964	2,0	378	5,0	183	9,9	117,6	14,5
6	7229	2,0	2835	5,0	1370	9,9	881	14,8
8	25797	2,0	10115	5,0	4887	10,0	3145	14,9
10	66750	2,0	26172	5,0	12645	10,0	8137	15,0
12	143171	2,0	56135	5,0	27123	10,0	17452	15,0
14	271138	2,0	106309	5,0	51366	10,0	33051	15,0

Tabel 15a. Afprøvning af formel (28); p_f er den faktiske p -værdi.

	Lastsituation 2b (figur 9)							
Tilstræbt →	$p = 20$		$p = 30$		$p = 50$		$p = 100$	
n	C	p_f	C	p_f	C	p_f	C	p_f
4	85,0	19,0	52,4	27,6	26,4	43,1	6,82	74,6
6	637	19,6	393	29,1	198	47,5	51,1	92,2
8	2273	19,9	1402	29,7	705	49,3	182	99,6
10	5882	20,0	3628	30,0	1825	50,0	472	103,1
12	12617	20,0	7782	30,1	3913	50,4	1012	105,1
14	23894	20,0	14737	30,1	7411	50,6	1917	106,3

Tabel 15b. Afprøvning af formel (28); p_f er den faktiske p -værdi.

Konklusionen er næsten som for formel (21) og (24), dog er formel (28) lidt mere unøjagtig for store p -værdier og for $n = 4$ samt til dels for $n = 6$.

Dette rådes der som tidligere bod på ved at angive nogle simple udtryk for $n = 4$ og $n = 6$, se nedenfor.

$$\underline{n = 4}: \quad C_{n\phi dv} = 20 \cdot \left(\frac{100}{p} - 1 \right) \quad (29)$$

$$\underline{n = 6}: \quad 3C^2 + \left(352 - \frac{44000}{p} \right) C + \left(1216 - \frac{243200}{p} \right) = 0 \quad (30)$$

begge gældende for lastsituation 2b (figur 9).

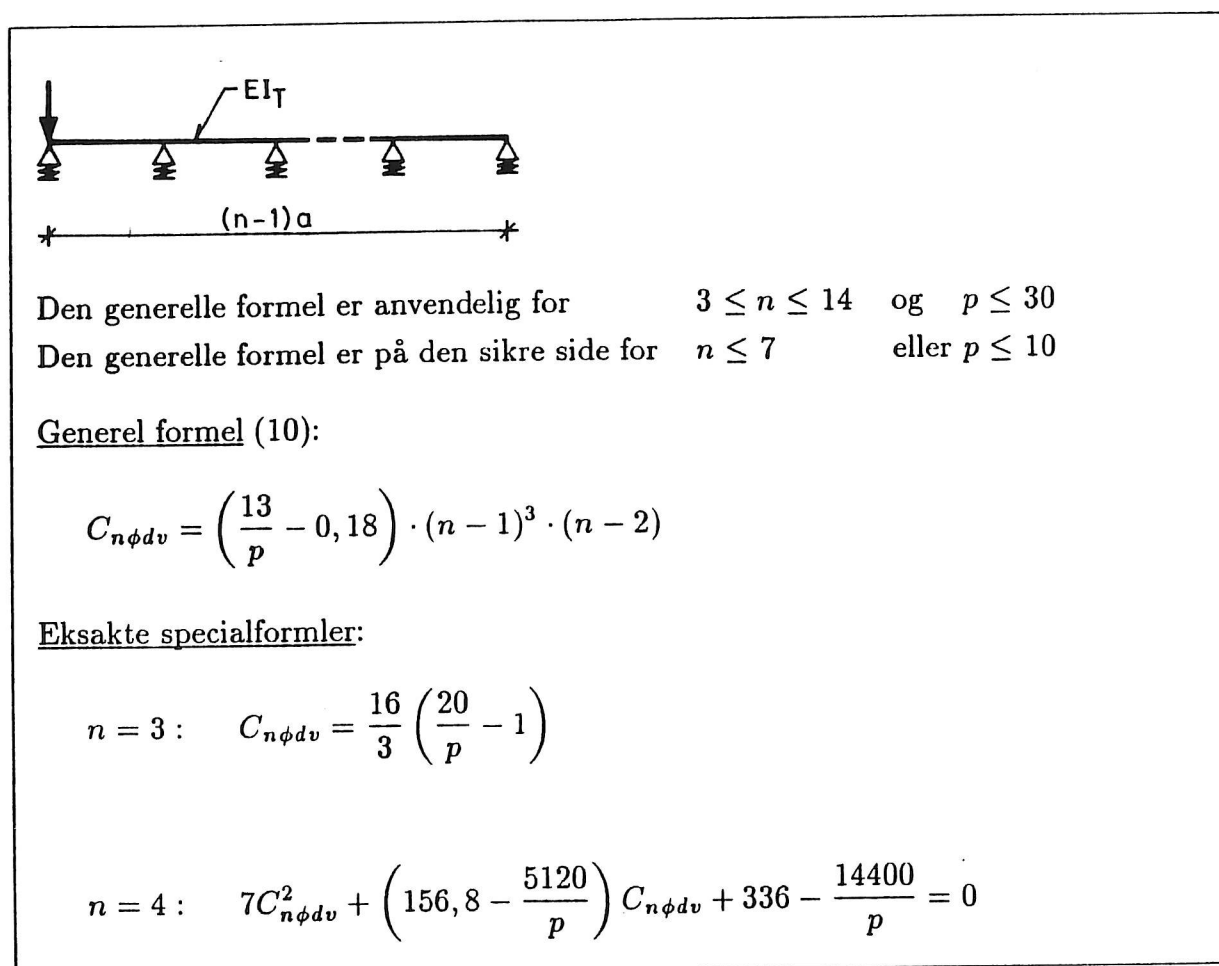
OVERSIGT OVER RESULTATERNE - FORMLER FOR $C_{n\phi dv}$

De efterfølgende figurer giver en oversigt over de udviklede formler til bestemmelse af den nødvendige tværbjælkestivhed udtrykt ved krav til lastfordelingsparameteren C . Den nødvendige bøjningsstivhed EI_T af tværdrageren findes som

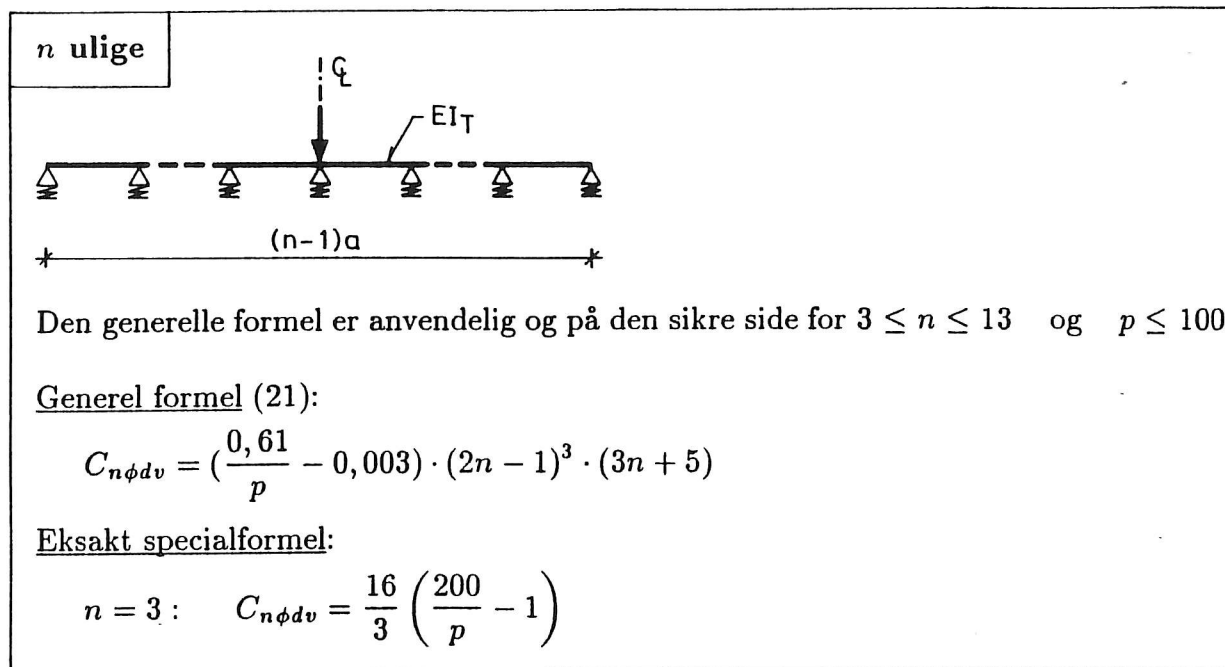
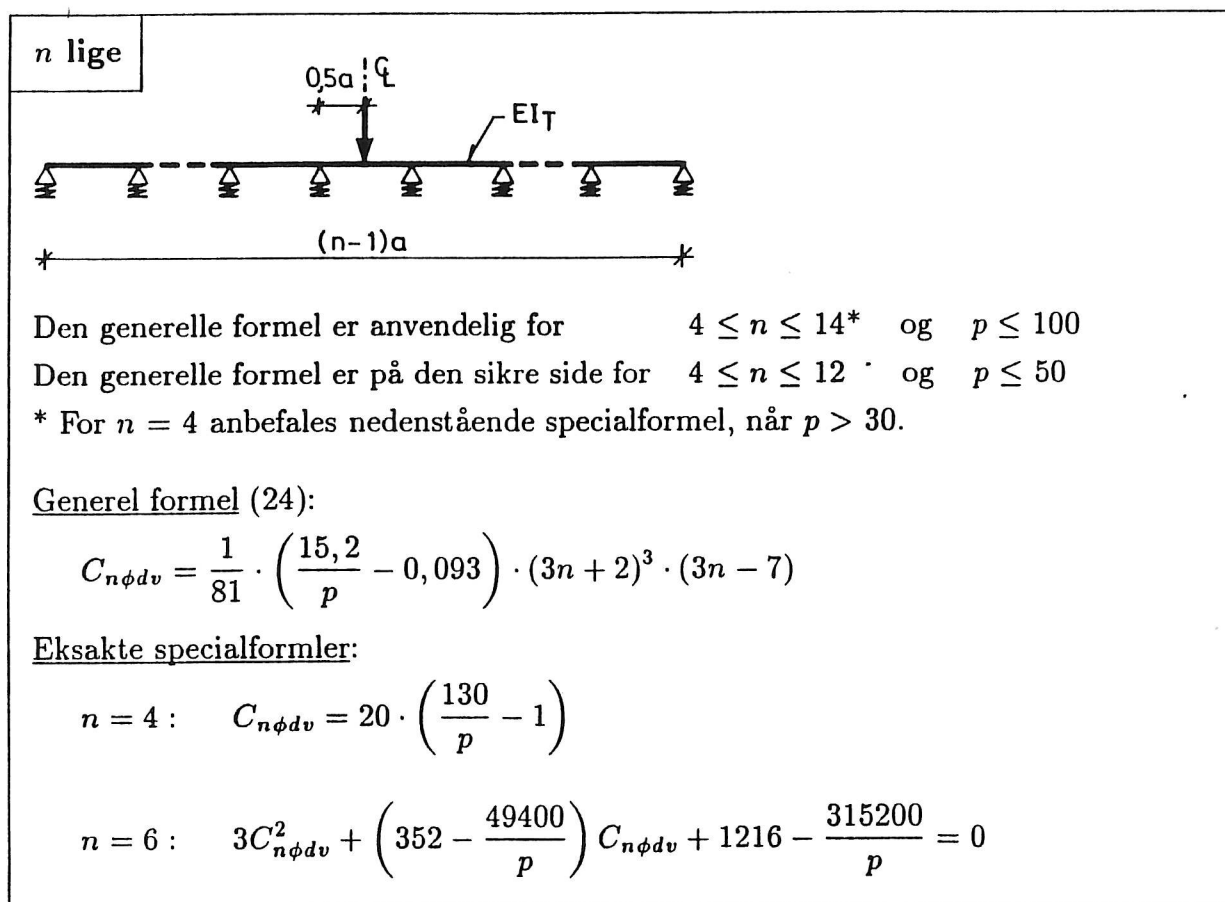
$$EI_T = \frac{k_p a^3}{48} \cdot C_{n\phi dv} \quad (31)$$

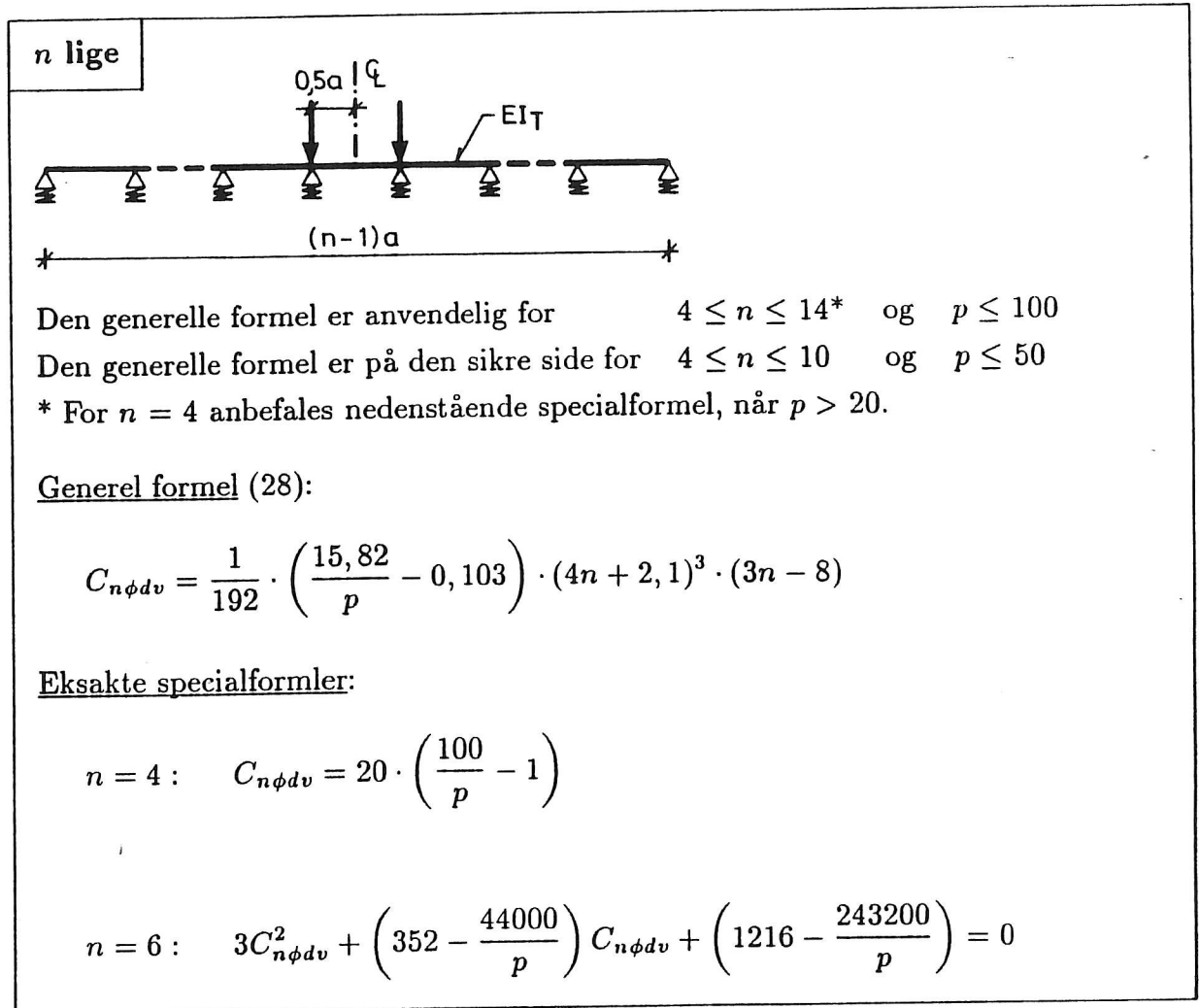
Det erindres, at p er den ønskede procentvise afvigelse i lastandel for den hårdest belastede hovedbjælke fra "idealsituationen" - et risteværk med en uendeligt stiv tværbjælke. Størrelsen p indsættes overalt som procenttallet, altså indsættes f.eks. $p = 10$, når den tilstræbte afvigelse er 10%.

Bemærk, at fjedrene symboliserer hovedbjælkerne, og at k_p er fjederkonstanten.



Figur 11. Resultater for last på yderbjælke.

Figur 12. Resultater for last på midterbjælke for n ulige.Figur 13. Resultater for lastsituation 2a, n lige.



Figur 14. Resultater for lastsituation 2b, n lige.

FORMLER TIL DIREKTE BESTEMMELSE AF BJÆLKELAST

Last på yderbjælke, formel for P_A $P = 1$

Hvis opgaven består i at bestemme den yderste bjælkes lastandel P_A svarende til situationen på figur 4, når risteværkets stivhedsforhold - udtrykt ved C - er kendt, kan denne let findes ved hjælp af

$$P_A = P_{A_0} \cdot (1 + 0,01p) \quad (5)$$

hvor p findes af tilnærmelsesformlen (10):

$$p = \frac{13}{\frac{C}{(n-1)^3(n-2)} + 0,18} = \frac{13(n-1)^3(n-2)}{C + 0,18(n-1)^3(n-2)}$$

Dette udtryk indsættes i (5), hvorved fås

$$P_A = P_{A_0} \cdot \frac{C + 0,31(n-1)^3(n-2)}{C + 0,18(n-1)^3(n-2)} \quad (32)$$

Heri indføres

$$P_{A_0} = \frac{4n-2}{n(n+1)} \quad (33)$$

der fås af det generelle udtryk (2) med lasten $P = 1$ og lastekscentriciteten $e = \frac{1}{2}(n-1)a$,

$$P_A = \frac{4n-2}{n(n+1)} \cdot \frac{C + 0,31(n-1)^3(n-2)}{C + 0,18(n-1)^3(n-2)} \quad (34)$$

Denne formel kan for $5 \leq n \leq 14$ benyttes med en fejl på højst $\pm 3\%$, når man begrænser sig til $p \leq 30$ som i de øvrige undersøgelser i dette afsnit. Hertil svarer $P_A : P_{A_0} = 1,30$, hvad der med benyttelse af (34) fører til uligheden

$$C > 0,253(n-1)^3(n-2) \quad (35)$$

	Formel (34)'s afvigelse Δ fra eksakt resultat							
	C_2	$\Delta\%$	C_{10}	$\Delta\%$	C_{20}	$\Delta\%$	C_{min}	$\Delta\%$
$n = 3$	48	0,1	5,33	4,9	(0)	(43,5)	2,02	13,6
4	346	0,0	54	1,0	17,3	5,0	13,7	6,3
5	1233	0,0	206	0,4	78	1,8	48,6	3,0
6	3169	0,0	549	0,2	222	0,7	126,5	1,2
7	6825	0,0	1195	0,1	500	0,2	273	0,2
8	12773	0,0	2281	0,1	973	0,1	521	-0,5
9	22060	0,1	3971	0,1	1717	-0,2	907	-1,1
10	35630	0,1	6455	0,1	2818	-0,3	1475	-1,4
11	54630	0,1	9946	0,1	4373	-0,4	2277	-1,7
12	80350	0,1	14683	0,1	6493	-0,4	3367	-1,9
13	114000	0,1	20930	0,1	9298	-0,5	4809	-2,0
14	157700	0,1	28990	0,1	12923	-0,5	6670	-2,2

Tabel 16. Afprøvning af formel (34). De valgte C -værdier C_2 , C_{10} og C_{20} svarer til $p = 2, 10$ og 20 i tabel 2. C_{min} iflg. (35).

For $n = 3$ og $n = 4$ kan der let opstilles eksakte udtryk baseret på de tidligere udviklede formler (11) og (12):

For $n = 3$ fås med $P = 1$

$$P_A = \frac{2,5C + 16}{3C + 16} \quad (36)$$

og for $n = 4$ fås med $P = 1$

$$P_A = \frac{0,7C^2 + 20,8C + 48}{(C + 2,4)(C + 20)} \quad (37)$$

Last midt på tværbjælke, formler for P_m

Der søges et analytisk udtryk for lastandelen P_m på den eller de midterste bjælker.

n ulige

Lastopstilling $P = 1$ over midterbjælke

Den søgte lastandel P_m bestemmes af

$$P_m = P_{m_0} \cdot (1 + 0,01p) \quad (15)$$

hvor p findes af tilnærmelsesformlen (21):

$$p = \frac{0,61}{\frac{C}{(2n-1)^3(3n+5)} + 0,003} = \frac{0,61(2n-1)^3(3n+5)}{C + 0,003(2n-1)^3(3n+5)}$$

Dette udtryk indsættes i (15), hvilket med $P_{m_0} = P : n = 1 : n$ giver

$$P_m = \frac{1}{n} \cdot \frac{C + 0,0091(2n-1)^3(3n+5)}{C + 0,0030(2n-1)^3(3n+5)} \quad (38)$$

Denne formel kan benyttes for $n = 3, 5, 7, 9, 11$ eller 13 med en fejl på højst 3%, når

$$C > 0,0031(2n-1)^3(3n+5)$$

Hvis kravet strammes til

$$C > 0,0092(2n-1)^3(3n+5)$$

er fejlen højst 1,2%. Disse resultater er fundet ved en undersøgelse svarende til den, der er redegjort for i tabel 16.

n lige

Lastopstilling 2a: $P = 1$ midt på tværbjælke

Af tilnærmelsesformlen (24) findes

$$p = \frac{15,2}{\frac{81C}{(3n+2)^3(3n-7)} + 0,093} = \frac{15,2(3n+2)^3(3n-7)}{81C + 0,093(3n+2)^3(3n-7)}$$

der indsat i (15) med $P_{m_0} = 1 : n$ giver

$$P_{m_a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{81C + 0,245(3n+2)^3(3n-7)}{81C + 0,093(3n+2)^3(3n-7)} \quad (39)$$

Denne formel kan benyttes for $n = 4, 6, 8, 10, 12$ eller 14 med en fejl på højst 7%, når

$$C > 0,00073(2n-1)^3(3n+5)$$

Når $n = 4$ undtages, er fejlen højst 2%.

Hvis ovenstående krav strammes til

$$C > 0,00260(2n-1)^3(3n+5)$$

er fejlen højst 2,3%. Hvis $n = 4$ undtages, bliver fejlen højst 1,0%.

Hvis der ønskes stor nøjagtighed også for $n = 4$, kan (25) benyttes til at opstille det eksakte udtryk

$$P_{m_a} = \frac{C + 46}{4(C + 20)} \quad (40)$$

gældende for en ydre last $P = 0,5$ på hver af de 2 midterste bjælker.

Lastopstilling 2b: $P = 0,5$ over begge midterbjælker

Af tilnærmelsesformlen (28) findes

$$p = \frac{15,82}{\frac{192C}{(4n+2,1)^3(3n-8)} + 0,103} = \frac{15,82(4n+2,1)^3(3n-8)}{192C + 0,103(4n+2,1)^3(3n-8)}$$

der indsat i (15) med $P_{m_o} = 1 : n$ giver (lidt afrundet)

$$P_{m_b} = \frac{1}{n} \cdot \frac{81C + 0,109(4n+2,1)^3(3n-8)}{81C + 0,043(4n+2,1)^3(3n-8)} \quad (41)$$

Denne formel kan benyttes for $n = 6, 8, 10, 12$ eller 14 med en fejl på højst 4%, når

$$C > 0,00028(4n+2,1)^3(3n-8)$$

Hvis dette krav strammes til

$$C > 0,00110(4n+2,1)^3(3n-8)$$

er fejlen højst 1,4%. Hvis også $n = 6$ undtages, bliver fejlen højst 0,6%.

For $n = 4$ benyttes (29) til opstilling af det eksakte udtryk

$$P_{m_b} = \frac{C + 40}{4(C + 20)} \quad (42)$$

For $n = 6$ kan (30) benyttes til opstilling af det eksakte udtryk

$$P_{m_b} = \frac{C^2 + 264C + 1216}{6C^2 + 704C + 2436} \quad (43)$$

LITTERATURLISTE

- [1] R8716 A. Albertsen: Ligningssystemer til bestemmelse af lastfordeling i simple risteværker. Aug. 1987. Instituttet for Bygningsteknik.
- [2] R8814 S. Kloch: Lastfordelingsprogrammet RIST00. Aug. 1988. Instituttet for Bygningsteknik.
- [3] Sten Balle og J.G. Øllgaard: Lastfordelende tværbjælker i bjælkebroer. Kompendium 67/29. Nov. 1969. Danmarks Ingeniørakademi, bygningsafdelingen.
- [4] A. Albertsen: Lastfordeling i brodæk. U8502. Januar 1985. Instituttet for Bygningsteknik.

SYMBOLLISTE

a	afstand mellem hovedbjælker
C	lastfordelingsparameter, se definition side 2
D	lastfordelingsparameter, se definition side 6
E	bjælkematerialets elasticitetsmodul
I_L	bøjningsinertimoment for en hovedbjælke
I_T	bøjningsinertimoment for tværbjælken
k_p	en hovedbjælkes fjederkonstant for bøjning
k_v	en hovedbjælkes fjederkonstant for vridning
P	ydre last
P_A	resulterende last på yderste hovedbjælke
P_m	resulterende last på en midterbjælke
p	tilstræbt afvigelse (%) fra tilfældet "uendeligt stiv tværbjælke"
p_f	faktisk afvigelse (%) fra tilfældet "uendeligt stiv tværbjælke"

